Ekonomski horizonti, Maj - Avgust 2017, Volumen 19, Sveska 2, 125 - 140
UDC: 33 ISSN: 1450-863 X

Pregledni članak
UDK: 37.04:371.212
doi:10.5937/ekonhor1702125T

UPARIVANJE UČENIKA I ŠKOLA

Dejan Trifunović*
Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu

U ovom radu prikazujemo problem uparivanja učenika i škola pomoću različitih mehanizama uparivanja. Ovo tržište je specifično po tome što su državne škole besplatne i nije moguće koristiti cenovni mehanizam koji bi izvršio optimalnu alokaciju učenika u škole. Stoga je potrebno koristiti različite algoritme uparivanja koji simuliraju tržišni mehanizam, i pomoću kojih određujemo jezgro kooperativne igre. U ovom radu ćemo utvrditi da je moguće primeniti kooperativnu teoriju igara u problemima uparivanja. Rad je preglednog karaktera i kroz ilustrativne primere ćemo porediti algoritme uparivanja sa aspekta kompatibilnosti podsticaja, stabilnosti uparivanja i efikasnosti. U radu ćemo prikazati i neke specifične probleme koji se mogu javiti kod uparivanja kao što su poboljšanje kvaliteta škole, favorizovanje manjinskih učenika, ograničena dužina liste preferencija i generisanje striktnih prioriteta na osnovu slabih prioriteta.

Ključne reči: uparivanje, bostonski algoritam, algoritam odloženog prihvatanja, algoritam najviših ciklusa trgovanja

JEL Classification: C78

UVOD

Najvažnija uloga koju cene imaju na tržištu je da vrše optimalnu alokaciju resursa. Međutim, postoje određene situacije kad cenovni mehanizam nije moguće primeniti, ali je i dalje potrebno optimalno alocirati resurse. Primer predstavlja upis učenika u državne srednje škole koje su besplatne. Stoga je potrebno konstruisati algoritam uparivanja koji simulira funkcionisanje tržišta. Dakle, predmet istraživanja u ovom radu je uparivanje učenika i škola u odsustvu novčanih transfera, dok je cilj istraživanja da ukaže na veliku praktičnu primenu algoritama uparivanja na ovom tržištu.

Sa metodološkog aspekta, algoritmi uparivanja zasnivaju se na primeni kooperativne teorije igara i oblikovanja ekonomskog mehanizma.

Osnovna podela igara je na kooperativne i nekooperativne igre. Kod nekooperativnih igara igrač nastoji da maksimizira svoju isplatu za dati skup pravila igre (Backović i Popović, 2012). Kod kooperativnih igara igrači formiraju koalicije i strategija je definisana na nivou koalicije (Backović, Popović & Stamenković, 2016). Kod kooperativnih

* *Korespondencija*: D. Trifunović, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Kamenička 6, 11000 Beograd, Republika Srbija; e-mail: dejan@ekof.bg.ac.rs

igara potrebno je odrediti jezgro igre kad ne postoji ni jedna koalicija aktera koja može da ostvari poboljšanje u Paretovom smislu u odnosu na alokaciju koja se nalazi u jezgru.

Oblikovanje ekonomskog mehanizma se zasniva na pretpostavci da akteri poseduju privatne informacije koje saopštavaju centru mehanizma. Mehanizam treba da bude zasnovan na takvim pravilima koja navode svakog aktera da istinito otkrije svoje privatne informacije. Ovakav mehanizam je kompatibilno podsticajan.

Prva hipoteza na kojoj se zasnivaju modeli uparivanja je da je pomoću algoritama uparivanja moguće odrediti jezgro kooperativne igre i odrediti alokaciju koja bi se ostvarila u tržišnom mehanizmu u kom bi bilo moguće vršiti novčane transfere. Druga hipoteza je da je moguće kreirati algoritme uparivanja koji su kompatibilno podsticajni.

Ovaj rad je, pre svega, preglednog karaktera, ali će kroz originalne primere biti na koncizan način ilustrovani postojeći rezultati.

Prilikom izbora mehanizma uparivanja potrebno je voditi računa o tome da učenici imaju podsticaj da istinito iskažu svoje preferencije, da uparivanje bude stabilno i efikasno.

A. Roth (2015) navodi da je mehanizam uparivanja, koji je korišćen u Njujorku do 2003, bio vrlo složen. Ovde je korišćen algoritam trenutnog uparivanja koji funkcioniše na sledeći način. Učenici su navodili listu od tri škole koje žele da upišu. Na osnovu pristiglih prijava, škola upisuje učenike sa najvećim prioritetom koji su tu školu naveli kao najbolji izbor. Ukoliko škola popuni kapacitet u prvom krugu, odbija višak prijavljenih učenika. U sledećem krugu učenici koji su prethodno odbijeni prijavljuju se u školu koja je njihov drugi najbolji izbor. Škola u kojoj je ostalo slobodnih mesta upisuje prijavljene učenike sa najvećim priorietom do svog kapaciteta i odbija višak prijavljenih učenika. Ista procedura se primenjuje u trećem krugu. S obzirom na karakteristike algoritma, nije bilo potrebno da učenici navedu više od tri škole koje žele da upišu, jer je verovatnoća da budu upisani u školu koja je njihov četvrti najbolji izbor bila zanemarljiva. Učenici koji nisu upisani ni nakon trećeg kruga raspoređivani su administrativnim putem u škole u kojima je bilo slobodnih mesta. Ovaj algoritam je bio vrlo neefikasan jer je skoro trećina učenika upisivana na ovaj način. Na osnovu podataka o navedenim preferencijama, može se utvrditi da je oko 80% učenika upisano u škole koje su naveli kao prvi izbor. Međutim, učenici u ovom algoritmu nemaju podsticaj da istinito iskažu svoje preferencije, pa je škola koja je navedena kao prvi najbolji izbor u najvećem broju slučajeva predstavljala strateški izbor. Drugim rečima, škola koja je navedena kao najbolji izbor je predstavljala školu u kojoj je postojala najveća verovatnoća da učenik bude primljen i često ta škola nije bila na vrhu liste preferencija. Detaljnija analiza algoritma trenutnog uparivanja je data u sledećim radovima: A. Abdulkardiroglu, A. Pathak i A. Roth (2005; 2009); A. Abdulkardiroglu, A. Pathak, A. Roth i T. Sonmez (2005). Imajući u vidu sve ove probleme, A. Roth je sa svojim saradnicima predložio upotrebu algoritma odloženog prihvatanja, koji vrši privremeno uparivanje. Za primenu ovog algoritma A. Roth je 2012. dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju, zajedno sa L. Chapley-em.

Algoritam odloženog prihvatanja prvi su razmatrali D. Gale i L. Chapley (1962). Navođenje liste preferencija u algoritmu odloženog prihvatanja mnogo je jednostavnije. Naime, učenik ne mora da navede školu za koju smatra da ima najveću verovatnoću da bude upisan kao svoj najbolji izbor, jer neće izgubiti prioritet u toj školi u odnosu na učenika koji ima niži prioritet kao što je to slučaj u algoritmu trenutnog uparivanja. Dakle, učenik istinito navodi preferencije u ovom algoritmu. Ovaj mehanizam dovodi do stabilnog uparivanja, što znači da nije moguće naći školu i učenika koji nisu međusobno upareni, a koji bi preferirali da budu upareni u odnosu na uparivanje koje je im je određeno u algoritmu. Drugim rečima, u stabilnoj alokaciji ne postoji opravdana zavist. Ovaj algoritam se pokazao znatno uspešnijim od algoritma trenutnog uparivanja, i broj učenika koji su upisani administrativnim putem u Njujorku smanjen je za deset puta. Istovremeno, bilo je mnogo više učenika koji su upisani u školu koja je njihov najbolji izbor, kao i broj učenika koji su upisani u školu koja je njihov drugi najbolji izbor, itd. Za uparivanje je izabran algoritam odloženog prihvatanja, iako je razmatran i algoritam najviših ciklusa trgovanja, koji su uveli D. Gale i H. Scarf (1974). I u ovom mehanizmu učenici istinito saopštavaju preferencije.

Kad su u pitanju prioriteti škola, oni se određuju na osnovu udaljenosti mesta stanovanja učenika od škole, i na osnovu toga da li učenik ima brata ili sestru koji već idu u tu školu. Učenici koji stanuju bliže školi imaju veći prioritet kao i oni čiji brat ili sestra su upisani u tu školu. Prioriteti mogu da budu određeni egzogeno kad ih školama dostavlja neki administrativni organ, kao što je to slučaj u Bostonu. U ovom slučaju, reč je o jednostranom uparivanju, jer su preferencije učenika važnije od egzogeno određenih prioriteta. Druga mogućnost je da prioritete određuju škole, kao što je slučaj u Njujorku. U ovom slučaju prioritete možemo da posmatramo kao preferencije, i tada se radi o problemu dvostranog uparivanja. Kod dvostranog uparivanja, preferencije škola su podjednako važne kao i preferencije učenika, za razliku od jednostranog uparivanja gde su bitne samo preferencije učenika. U problemu jednostranog uparivanja, stabilna alokacija ne mora da bude optimalna u Paretovom smislu, za razliku od dvostranog uparivanja gde ne postoji razlika između ova dva cilja. Kad je u pitanju kompatibilnost podsticaja, odnosno, istinitost iskazivanja preferencija od strane učenika, A. Abdulkadiroglu (2013) smatra da algoritam sa ovom osobinom značajno olakšava učeniku da navede listu svojih preferencija.

Ostatak rada je organizovan na sledeći način. U drugom delu prikazujemo načine funkcionisanja bostonskog algoritma, algoritma odloženog prihvatanja i algoritma najviših ciklusa trgovanja. U trećem delu sledi detaljna analiza ovih algoritama sa aspekta kompatibilnosti podsticaja, stabilnosti i efikasnosti. Četvrti deo razmatra da li algoritmi uparivanja uvažavaju pobojšanje rangiranja škole na listi preferencija usled povećanja njenog kvaliteta kao i upisnu politiku koja favorizuje manjinske učenike. U petom delu se analiziraju osobine algoritama uparivanja u slučaju ograničene dužine liste preferencija koju učenici mogu da navedu. U šestom delu su prikazani različiti načini za kreiranje striktnih prioriteta na osnovu slabih prioriteta, nakon čega slede zaključna razmatranja.

ALGORITMI UPARIVANJA

Algoritme uparivanja možemo da ilustrujemo pomoću sledećeg primera. Pretpostavimo da imamo četiri škole (c_1, c_2, c_3, c_4) sa po jednim mestom i četiri učenika (s_1, s_2, s_3, s_4). Preferencije i prioriteti su prikazani u Tabeli 1 i Tabeli 2.

Tabela 1 Prioriteti

$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$	$\succ_{c_3}$	$\succ_{c_4}$
s_4	s_1	s_4	s_2
s_2	s_2	s_3	s_3
s_3	s_3	s_2	s_1
s_1	s_4	s_1	s_4

Izvor: Autor

Tabela 2 Preferencije

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{s_4}$
c_1	c_4	c_1	c_4
c_2	c_3	c_2	c_2
c_3	c_2	c_4	c_1
c_4	c_1	c_3	c_3

Izvor: Autor

Prvo ćemo predstaviti bostonski algoritam, u kome se vrši trenutno uparivanje. Svaki učenik upućuje predlog školi koja je njegov najbolji izbor. Škola zadržava učenika sa najvećim prioritetom i odbija ostale. U narednom koraku, učenici koji su odbijeni prijavljuju se u školu koja je drugi najbolji izbor, pri čemu škole zadržavaju učenike sa najvećim prioritetom. Postupak se ponavlja sve dok svi učenici ne budu upareni sa školama.

U prethodnom primeru, u prvom koraku, učenici 1 i 3 prijavljuju se u školu 1, a učenici 2 i 4 se prijavljuju u školu 4 (Tabela 3).

Tabela 3 Bostonski algoritam (1)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_1, s_3			s_2, s_4

Izvor: Autor

Škola 1 zadržava učenika 3 koji ima veći prioritet, a škola 4 zadržava učenika 2. U narednom koraku, učenici 1 i 4 se prijavljuju u školu 2 (Tabela 4).

Tabela 4 Bostonski algoritam (2)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_3			s_2
	s_1,s_4		

Izvor: Autor

Škola 2 zadržava učenika 1 koji ima veći prioritet. U narednom koraku, učenik 4 se prijavljuje u školu 1, ali ovde nema slobodnih mesta. U poslednjem koraku učenik 4 se prijavljuje u školu 3 sa kojom je uparen. Dakle, u bostonskom algoritmu imamo sledeće uparivanje (Tabela 5).

Tabela 5 Bostonski algoritam (3)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_3	s_1	s_4	s_2

Izvor: Autor

U algoritmu odloženog prihvatanja, učenik i škola su privremeno upareni, i škola može da odbije učenika sa kojim je trenutno uparena u korist učenika sa većim prioritetom koji se prijavi kasnije. U prvom koraku situacija je ista kao u bostonskom algoritmu (Tabela 6).

Tabela 6 Algoritam odloženog prihvatanja (1)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_1,s_3			s_2, s_4

Izvor: Autor

Ista situacija se ponavlja i u drugom koraku, kad se učenici 1 i 4 prijavljuju u školu 2 (Tabela 7).

Tabela 7 Algoritam odloženog prihvatanja (2)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_3			s_2
	s_1, s_4		

Izvor: Autor

U trećem koraku, učenik 4 se prijavljuje u školu 1 (Tabela 8).

Tabela 8 Algoritam odloženog prihvatanja (3)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_3			s_2
	s_1		
s_4			

Izvor: Autor

Škola 1 sada zadržava učenika 4 kao najbolji izbor i odbija učenika 3, koji se u narednom koraku prijavljuje u školu 2 (Tabela 9).

Tabela 9 Algoritam odloženog prihvatanja (4)

c_1	c_2	c_3	c_4
			s_2
	s_1		
s_4			
	s_3		

Izvor: Autor

Škola 2 zadržava učenika 1, kao najbolji izbor, i u poslednjem koraku učenik 3 se prijavljuje u školu 3 sa kojom je uparen (Tabela 10).

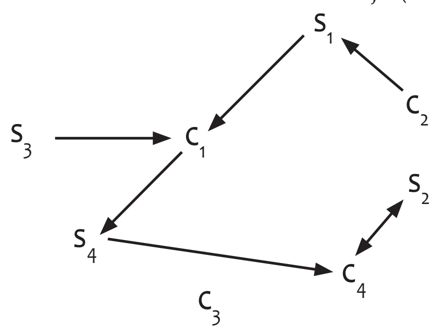
Tabela 10 Algoritam odloženog prihvatanja (5)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_4	s_1	s_3	s_2

Izvor: Autor

U algoritmu najviših ciklusa trgovanja, učenik povlači strelicu prema školi koja je njegov najbolji izbor, i škola povlači strelicu prema učeniku sa najvećim prioritetom. Ciklus započinje sa učenikom *i,* koji povlači strelicu prema školi *k,* koja povlači strelicu prema učeniku *j*, itd, pri čemu poslednja škola u nizu povlači strelicu prema učeniku *i,* od koga je započeo ciklus. Učenici u ciklusu su upareni sa školama prema kojima povlače strelicu i uklanjaju se iz algoritma. Postupak se ponavlja dok svi učenici ne budu upareni.

U prvom koraku imamo sledeću situaciju (Slika 1):

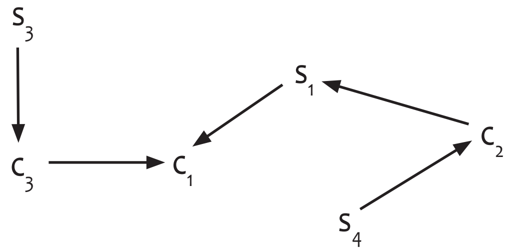


Slika 1 Algoritam najviših ciklusa trgovanja (1)

Izvor: Autor

Na osnovu Slike 1 možemo da utvrdimo da postoji jedan ciklus koji čine škola 4 i učenik 2, koji su upareni i uklanjaju se iz algoritma.

U drugom koraku algoritma, učenici i škole povlače strelicu prema preostalim školama i učenicima koji su njihov najbolji izbor (Slika 2).



Slika 2 Algoritam najviših ciklusa trgovanja (2)

Izvor: Autor

Na osnovu Slike 2, vidimo da postoji jedan ciklus koji čine (s_1, c_1, s_4, c_2). Dakle, učenik 1 je uparen sa školom 1 i učenik 4 je uparen sa školom 2.

U poslednjem koraku, imamo jedan ciklus, i škola 3 je uparena sa učenikom 3 (Slika 3).

Slika 3 Algoritam najviših ciklusa trgovanja (3)

Izvor: Autor

Prema tome, u algoritmu najviših ciklusa trgovanja imamo sledeću alokaciju (Tabela 11).

Tabela 11 Najviši ciklusi trgovanja

c_1	c_2	c_3	c_4
s_1	s_4	s_3	s_2

Izvor: Autor

Ukoliko uporedimo alokaciju u algoritmu najviših ciklusa trgovanja i alokaciju koja se ostvaruje u algoritmu odloženog prihvatanja, vidimo da u prvoj alokaciji postoji opravdana zavist kad postoje učenik *i* i škola *j,* tako da učenik *i* preferira školu *j* u odnosu na školu sa kojom je uparen u algoritmu, dok u školi *j* učenik *i* ima veći piritet od učenika *l* koji je uparen sa školom *j* u algoritmu. Ukoliko postoji opravdana zavist, uparivanje nije stabilno. U prethodnom primeru, učenik 3 preferira školu 1 u koju je upisan učenik 1, a istovremeno učenik 3 ima veći prioritet u školi 1 od učenika 1. S druge strane, alokacija u algoritmu najviših ciklusa trgovanja je efikasnija od one koja se ostvaruje u algoritmu odloženog prihvatanja, jer su učenici 1 i 4 upareni sa školama koje imaju veći rang na listi njihovih preferencija, dok su učenici 2 i 3 indiferentni između dve alokacije.

OSOBINE ALGORITAMA UPARIVANJA

U prethodnom primeru pošli smo od pretpostavke da će učenici u svakom algoritmu istinito iskazati svoje preferencije. Međutim, problem sa bostonskim algoritmom je u tome što učenici imaju podsticaj da iskazuju preferencije koje ne odgovaraju stvarnim preferencijama, i učenik kao najbolji izbor navodi školu za koju pretpostavlja da ima najveću mogućnost da bude upisan, a koja se, možda, ne nalazi u vrhu liste njegovih preferencija. To znači da u bostonskom mehanizmu određujemo Nešovu ravnotežu.

U sledećem primeru, imamo dva učenika i dve škole sa po jednim mestom (Tabela 12). Pretpostavimo da je isplata 2 kad je učenik upisan u preferiranu školu, a u suprotnom ima isplatu 1.

Tabela 12 Preferencije i prioriteti

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$
c_1	c_2
c_2	c_1

$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$
s_2	s_2
s_1	s_1

Izvor: Autor

Učenik ima dve strategije: da istinito navede svoje preferencije, ili da navede izmenjeni redosled stvarnih preferencija. Ova igra u normalnoj formi ima dve Nešove ravnoteže (Tabela 13).

Tabela 13 Nešove ravnoteže

		učenik 2	
		c_1, c_2	c_2, c_1
učenik 1	c_1, c_2	1 1	2 2
	c_2, c_1	1 1	2 2

Izvor: Autor

U prvoj Nešovoj ravnoteži, učenici istinito navode preferencije, a u drugoj Nešovoj ravnoteži, učenik 1 navodi izmenjen redosled preferencija. Detaljnije razmatranje Nešovih ravnoteža u Bostonskom algoritmu se može naći u P. Pathak i T. Sonmez (2008).

Prethodna igra predstavlja statičku igru sa savršenim informacijama. Ukoliko igrači znaju samo raspodelu verovatnoće za moguće tipove drugih igrača, gde tip igrača predstavlja redosled njegovih preferencija, a ne znaju sa sigurnošću njihove preferencije, imamo igru sa nesavršenim informacijama. H. Ergin i T. Sonmez (2006) dokazuju da u igri sa nesavršenim informacijama učenici mogu da budu u boljem položaju u bostonskom algoritmu nego u algoritmu odloženog prihvatanja.

U prethodnom razmatranju videli smo da je glavni nedostatak bostonskog algoritma to što učenici ne iskazuju istinito svoje preferencije. Međutim, bostonski algoritam poseduje i neka poželjna svojstva koja navode F. Kojima i U. Unver (2014). Prvo, ovaj algoritam striktno uvažava navedeni redosled preferencija, što znači da ako neki učenik nije uparen sa školom koju preferira u odnosu na školu sa kojom je uparen, preferirana škola je popunila mesta sa učenicima koji su naveli tu školu na višem mestu na listi preferencija. Druga poželjna osobina bostonskog algoritma je da povećanje broja raspoloživih mesta u školama ne može da dovede učenike u lošiji položaj. Treća poželjna osobina ovog mehanizma je da ako se broj učenika koji učestvuju u uparivanju smanji, ostali učenici ne mogu da budu u lošijem položaju. Konačno, ukoliko iz procesa uparivanja uklonimo učenika koji je uparen sa određenom školom, neće doći do promene škole sa kojom su upareni ostali učenici.

Algoritam odloženog prihvatanja dovodi do istinitog otkrivanja preferencija. Druga poželjna osobina ovog algoritma je da eliminiše opravdanu zavist, a najveći nedostatak je što alokacija koja se ostvaruje nije efikasna. Kod uparivanja jedan prema jedan, u algoritmu u kome jedna strana tržišta upućuje predlog drugoj strani, akteri koji upućuju predlog imaju podsticaj da istinito otkriju svoje preferencije. Međutim, uparivanje učenika i škola predstavlja slučaj uparivanja više prema jedan, jer škola može da bude uparena sa više učenika, dok svaki učenik može da bude uparen sa samo jednom školom. A. Roth (1985) je dokazao da u algoritmu u kome učenici upućuju predlog školi, učenici istinito iskazuju svoje preferencije. Međutim, u algoritmu u kome škole upućuju predlog učenicima, škole imaju podsticaj da netačno iskažu svoje prioritete.

Ovo možemo da ilustrujemo sledećim primerom u kome imamo 3 škole i 4 učenika, pri čemu prva škola može da upiše 2 učenika, a ostale škole po jednog učenika. Pretpostavimo da učenici i škole imaju sledeće preferencije i prioritete (Tabela 14 i Tabela 15).

Tabela 14 Prioriteti

$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$	$\succ_{c_3}$
s_1	s_1	s_3
s_2	s_2	s_1
s_3	s_3	s_2
s_4	s_4	s_4
$q_1=2$	$q_2=1$	$q_3=1$

Izvor: Roth, 1985

Tabela 15 Preferencije

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{s_4}$
c_3	c_2	c_1	c_1
c_1	c_1	c_3	c_2
c_2	c_3	c_2	c_3

Izvor: Roth, 1985

Prvo pretpostavimo da škole istinito saopštavaju svoje prioritete. U tom slučaju primenom algoritma odloženog prihvatanja u kome škole upućuju predlog dobijamo uparivanje: $\mu^C = [(c_1, (s_3, s_4)), (c_2, s_2)\ (c_3, s_1)]$. Međutim, školi 1 se isplati da navede drugačije prioritete od stvarnih. Pretpostavimo da škola 1 izostavi učenike 1 i 3 sa liste svojih prioriteta, i navede prioritet $\succ_{c_1}'$: s_2, s_4. Primenom algoritma odloženog prihvatanja, u kome škola upućuje predlog, dobijamo uparivanje: $\mu^{C'} = [(c_1, (s_2, s_4)), (c_2, s_1)\ (c_3, s_3)]$. Vidimo da se školi 1 isplati ova strategija, jer je uparena sa učenicima 2 i 4, dok, kad istinito navede svoje prioritete uparena je sa učenicima 3 i 4.

Pored manipulacije prioritetima, škole mogu da manipulišu kapacitetima da bi bile uparene sa skupom preferiranih učenika. Škola ne može da navede da ima veći kapacitet od stvarnog, ali može da navede da ima manji kapacitet. Ovaj problem detaljno je analizirao T. Sonmez (1997).

Razmotrimo primer u kome imamo tri učenika i dve škole, pri čemu prva škola može da primi dva učenika, a druga škola može da primi jednog učenika. Preferencije i prioriteti su prikazani u Tabeli 16 i Tabeli 17.

Tabela 16 Prioriteti

$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$
s_1	s_3
s_2, s_3	s_1
s_2	s_2
s_3	
$q_1=2$	$q_2=1$

Izvor: Autor

Tabela 17 Preferencije

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$
c_2	c_1	c_1
c_1	c_2	c_2

Izvor: Autor

Ukoliko obe škole navedu istinite kapacitete, algoritam odloženog prihvatanja u kome učenici upućuju predlog dovodi do uparivanja: $\mu^S(q_1 = 2, q_2 = 1) = ((c_1, (s_2, s_3)), (c_2, s_1))$.

Pretpostavimo da škola 1 navede da ima manji kapacitet i da može da primi samo jednog učenika. Nakon ove manipulacije, algoritam odloženog prihvatanja dovodi do alokacije: $\mu^S(q_1 = 1, q_2 = 1) = ((c_1, s_1), (c_2, s_3))$. Vidimo da se školi 1 isplati ovakva manipulacija jer je uparena sa učenikom 1 koga preferira u odnosu na to da bude uparena sa učenicima 2 i 3. Pomalo paradoksalno, i škola 2 je u boljem položaju usled manipulacije kapacitetima škole 1, jer je sad uparena sa učenikom 3 koga preferira u odnosu na učenika 1.

Videli smo da škole imaju podsticaj da neistinito iskazuju svoje prioritete, ili da prijavljuju manji kapacitet od onog koji stvarno imaju. Međutim, F. Kojima i P. Pathak (2009) dokazuju da podsticaj za ove dve vrste manipulacija na velikim tržištima teži nuli.

Što se tiče algoritma najviših ciklusa trgovanja, ovaj algoritam dovodi do istinitog otkrivanja preferencija i do efikasne alokacije. Najveći nedostatak ovog algoritma je što ne eliminiše opravdanu zavist. Detaljnije poređenje karakteristika ova dva algoritma može se naći u radovima: (Abdulkardiroglu & Sonmez, 2003; Abdulkardiroglu, 2013).

Videli smo da algoritam odloženog prihvatanja dovodi do gubitka efikasnosti u odnosu na algoritam najviših ciklusa trgovanja. Polazeći od ove ideje, O. Kesten (2010) razmatra da li je moguće poboljšati efikasnost algoritma odloženog prihvatanja tako što bi bila izvršena izmena redosleda škola na osnovu preferencija učenika. Ako se vratimo na naš početni primer, u prvom koraku algoritma odloženog prihvatanja, učenik 3 se prijavljuje u školu 1, ali mu ovo ne donosi nikakvu korist, jer je u kasnijim koracima algoritma odbijen u ovoj školi, dok je za učenika 1 koji je odbijen u prvom koraku škola 1 najbolji izbor. Dakle, učenik 3 stvara negativne eksternalije učeniku 1 bez ikakve koristi za sebe. Upravo u ovome O. Kesten (2010) vidi mogućnost za poboljšanje efikasnosti algoritma odloženog prihvatanja, tako što bi sa liste preferencija učenika koji stvara negativne eksternalije bez koristi za sebe bile izbrisane kritične škole.

Za primenu ovog algoritma potrebno je da učenik koji narušava uparivanje ostalih bez ikakve koristi za sebe prihvati eliminisanje kritične škole sa liste njegovih preferencija. Algoritam koji funkcioniše na ovaj način naziva se mehanizam odloženog prihvatanja koji je prilagođen za efikasnost, i ova procedura treba da eliminiše gubitak efikasnosti koji nastaje iz prethodno opisanog razloga. Očigledno je da ovaj modifikovani algoritam dominira u Paretovom smislu nad standardnim algoritmom odloženog prihvatanja. Ukoliko svi učenici koji stvaraju negativne eksternalije pristanu na eliminisanje kritične škole iz liste preferencija, modifikovani algoritam dovodi do efikasne alokacije.

U prethodnom primeru bi trebalo da sa liste preferencija učenika 3 izostavimo školu 1, i primenimo algoritam odloženog prihvatanja. Međutim, nakon ove izmene, videli bismo da učenik 3 ponovo stvara negativne eksternalije drugim učenicima bez ikakve koristi za sebe prijavljivanjem u školu 2, jer će u narednim koracima algoritma biti odbijen i u ovoj školi. Dakle, neophodno je da sa liste preferencija učenika 3 eliminišemo školu 1 i školu 2. Nakon ovih izmena prikazanih u Tabeli 18 i Tabeli 19 možemo da primenimo modifikovani algoritam odloženog prihvatanja.

Tabela 18 Prioriteti

$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$	$\succ_{c_3}$	$\succ_{c_4}$
s_4	s_1	s_4	s_2
s_2	s_2	s_3	s_3
s_3	s_3	s_2	s_1
s_1	s_4	s_1	s_4

Izvor: Autor

Tabela 19 Preferencije

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{s_4}$
c_1	c_4		c_4
c_2	c_3		c_2
c_3	c_2	c_4	c_1
c_4	c_1	c_3	c_3

Izvor: Autor

Uz ove izmene u prvom koraku algoritma imamo sledeću situaciju (Tabela 20).

Tabela 20 Povećanje efikasnosti (1)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_1			s_2, s_3, s_4

Izvor: Autor

Učenici 3 i 4 su odbijeni u školi 4, i prijavljuju se u škole 3 i 2, u drugom koraku (Tabela 21).

Tabela 21 Povećanje efikasnosti (2)

c_1	c_2	c_3	c_4
s_1	s_4	s_3	s_2

Izvor: Autor

Alokacija koju smo dobili odgovara alokaciji koja se ostvaruje u algoritmu najviših ciklusa trgovanja. Prema tome, modifikovani algoritam odloženog prihvatanja nas je doveo do alokacije koja je efikasna u Paretovom smislu.

POVEĆANJE RANGIRANJA ŠKOLE NA LISTI PREFERENCIJA USLED POBOLJŠANJA NJENOG KVALITETA I MANJINSKI UČENICI

Algoritam odloženog prihvatanja možemo da analiziramo sa aspekta komparativne statike, tj. kako se menja uparivanje usled toga što neka škola poboljša svoj kvalitet. Usled poboljšanja kvaliteta škole, učenici bi trebalo da povećaju rang koji toj školi dodeljuju na listi preferencija. Algoritam odloženog prihvatanja uvažava poboljšanje kvaliteta škole ukoliko je škola, uparena sa učenikom koji ima veći prioritet nakon što škola poveća svoj kvalitet.

Razmotrimo početni primer i pretpostavimo da škola 3 poboljšava svoj kvalitet i da učenik 3 stavlja školu 3 na vrh liste svojih preferencija (Tabela 22 i Tabela 23).

Tabela 22 Prioriteti

$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$	$\succ_{c_3}$	$\succ_{c_4}$
s_4	s_1	s_4	s_2
s_2	s_2	s_3	s_3
s_3	s_3	s_2	s_1
s_1	s_4	s_1	s_4

Izvor: Autor

Tabela 23 Preferencije

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{s_4}$
c_1	c_4	c_3	c_3
c_2	c_3	c_1	c_4
c_3	c_2	c_2	c_2
c_4	c_1	c_4	c_1

Izvor: Autor

Nakon ove izmene i primene algoritma odloženog prihvatanja, dobijamo sledeće uparivanje (Tabela 24).

Tabela 24 Povećanje kvaliteta škole

c_1	c_2	c_3	c_4
s_3	s_1	s_4	s_2

Izvor: Autor

U primeru vidimo da je uvaženo poboljšanje kvaliteta škole 3 koja je sada uparena sa učenikom 4 umesto sa učenikom 3. Međutim, lako je konstruisati primer u kome algoritam odloženog prihvatanja ne uvažava poboljšanje kvaliteta škole. Pored toga, J. W. Hatfield, F. Kojima i Y. Narita (2017) dokazuju da ni bostonski ni algoritam najviših ciklusa trgovanja ne uvažavaju uvek poboljšanje kvaliteta škole.

Analizirajući ovaj problem komparativne statike na velikim tržištima, J. W. Hatfield, F. Kojima i Y. Narita (2017) dokazuju da algoritam odloženog prihvatanja uvažava poboljšanje kvaliteta škole na velikim tržištima. Drugim rečima, nakon poboljšanja kvaliteta škole, kako se veličina tržišta povećava, verovatnoća da škola bude uparena sa učenikom kome dodeljuje manji prioritet se smanjuje. Međutim, bostonski i algoritam najviših ciklusa trgovanja nemaju ovo svojstvo na velikim tržištima. Prema tome, algoritam odloženog prihvatanja pruža podsticaj školama da poboljšaju svoj kvalitet, dok bostonski, i algoritam najviših ciklusa trgovanja nemaju ovo svojstvo.

Učenici se razlikuju prema materijalnom stanju, društvenoj grupi, rasnoj pripadnosti, itd. Škole koje su popularne nalaze se u centralnim delovima grada gde žive učenici koji su boljeg imovinskog stanja. Pošto škole određuju prioritet na osnovu udaljenosti mesta stanovanja učenika od škole, učenici koji su lošijeg imovinskog stanja nemaju veliku mogućnost da budu upisani u popularne škole. U tom cilju, uvode se kvote za manjinske učenike u popularnim školama. U najvećem broju slučajeva, ovakva politika dovodi manjinske učenike u bolji položaj. Međutim, F. Kojima (2012) dokazuje da ove kvote mogu u određenim slučajevima da dovedu manjinske učenike u lošiji položaj, pošto se većinski učenici prijavljuju u druge popularne škole u kojima nema kvote i time smanjuju mogućnost manjinskim učenicima da budu upisani.

Sledeći primer ilustruje situaciju kad uvođenje kvote dovodi manjinske učenike u lošiji položaj. U ovom primeru imamo 3 učenika i 2 škole, od kojih prva škola ima 1 mesto, a druga škola 2 mesta. Preferencije učenika i prioriteti škola su prikazani u Tabeli 25 i Tabeli 26. Učenici 1 i 2 su većinski, a učenik 3 je manjinski.

Tabela 25 Preferencije

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$
c_2	c_2	c_1
c_1	c_1	c_2

Izvor: Autor

Tabela 26 Prioriteti

$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$
s_1	s_3
s_2	s_2
s_3	s_1
$q_1 = 1$	$q_2 = 2$

Izvor: Autor

Prvo određujemo alokaciju uz pretpostavku da ne postoji kvota za manjinske učenike. U algoritmu odloženog prihvatanja u kome učenici upućuju predlog, dobijamo sledeću alokaciju (Tabela 27).

Tabela 27 Manjinski učenici (1)

c_1	c_2
s_3	s_1, s_2

Izvor: Autor

Pretpostavimo sada da škola 2 uvodi kvotu, tako da rezerviše jedno mesto za manjinskog učenika 3. Algoritam odloženog prihvatanja daje sledeću alokaciju (Tabela 28).

Tabela 28 Manjinski učenici (2)

c_1	c_2
s_1	s_2, s_3

Izvor: Autor

Nakon uvođenja kvote manjinski učenik 3 je uparen sa manje preferiranom školom 2.

Pored uvođenja kvote, drugi način za favorizovanje manjinskih učenika je izmena prioriteta, tako da se manjinskim učenicima daje veći prioritet u odnosu na većinske učenike, a prioriteti unutar svake od ovih grupa ostaju isti. Dalje, F. Kojima (2012) dokazuje da i algoritam najviših ciklusa trgovanja može da dovede manjinske učenike u lošiji položaj ako se uvede kvota za ove učenike, ili ako se izmene prioriteti u njihovu korist.

Da bi bio umanjen problem koji se javlja kad uvođenje kvote dovodi manjinske učenike u nepovoljniji položaj, I. Hafalir, B. Yenmez i M. Yildirim (2013) predlažu da se umesto fiksnih kvota koriste fleksibilne kvote. Kad se primenjuje fiksna kvota, škola nema pravo da upiše većinske učenike u okviru kvote za manjinske, čak iako se ne prijavi dovoljan broj manjinskih učenika za popunjavanje kvote. Kod fleksibilne kvote, škola prvo upisuje manjinske učenike u okviru njihove kvote, ali nepopunjena mesta u okviru ove kvote može da popuni većinskim učenicima. Simulaciona analiza koju su izvršili ovi autori pokazuje da je broj manjinskih učenika koji su u boljem položaju u algoritmima odloženog prihvatanja i najviših ciklusa trgovanja sa fleksibilnom kvotom značajno veći od broja manjinskih učenika koji su u boljem položaju u ovim algoritmima sa fiksnom kvotom.

OGRANIČENA DUŽINA LISTE PREFERENCIJA

U prethodnom razmatranju pretpostavljali smo da učenici mogu da navedu svoje preferencije za neograničenu dužinu liste škola. U stvarnosti, učenici imaju ograničenje na dužinu liste svojih preferencija. Na primer, u Njujorku, izbor je ograničen na najviše dvanaest škola, dok je u Bostonu bilo moguće navesti najviše pet škola pre 2006. Uz ovu pretpostavku nije više izvesno da će algoritmi odloženog prihvatanja i najviših ciklusa trgovanja dovesti do istinitog otkrivanja preferencija. Drugim rečima, u ovim algoritmima, uz ograničenu dužinu liste preferencija, potrebno je da odredimo Nešovu ravnotežu, kao i u bostonskom algoritmu bez ovog ograničenja. Stoga, G. Haeringer i F. Klijn (2009) određuju Nešove ravnoteže u algoritmima sa ograničenom listom preferencija u bostonskom mehanizmu, algoritmu odloženog prihvatanja i algoritmu najviših ciklusa trgovanja. Značajan rezultat do koga dolaze ovi autori je da su u bostonskom algoritmu i algoritmu najviših ciklusa trgovanja Nešove ravnoteže nezavisne od dužine liste preferencija. S druge strane, Nešove ravnoteže u algoritmu odloženog prihvatanja imaju hijerarhijski odnos, što znači da Nešova ravnoteža u algoritmu sa kraćom listom preferencija predstavlja Nešovu ravnotežu u algoritmu sa dužom listom preferencija.

Određivanje Nešove ravnoteže u algoritmu odloženog prihvatanja možemo da ilustrujemo na osnovu primera iz G. Haeringer i F. Klijn (2009). U ovom primeru imamo tri učenika i tri škole, i svaka škola može da primi jednog učenika. Dužina liste preferencija je ograničena na dve škole. U Tabeli 29 prikazane su preferencije učenika uz neograničenu dužinu liste preferencija, preferencije uz ograničeni izbor, kao i prioriteti škola.

Primenom algoritma odloženog prihvatanja u kome učenici upućuju predlog na osnovu ograničene dužine liste preferencija, dobijamo alokaciju: $[(s_1, c_1), (s_2, c_2), (s_3, c_3)]$. U ovoj alokaciji postoji opravdana zavist, pošto učenik 2 preferira školu 3, i ima veći prioritet u toj školi nego učenik 3. Ovde dolazimo do rezultata koji odstupa od ranijih zaključaka, jer alokacija koja se ostvaruje u Nešovoj ravnoteži u algoritmu odloženog prihvatanja ne mora da bude stabilna kad je dužina liste preferencija ograničena.

Tabela 29 Ograničena lista preferencija

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{s_1}^{(2)}$	$\succ_{s_2}^{(2)}$	$\succ_{s_3}^{(2)}$	$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$	$\succ_{c_3}$
c_1	c_3	c_3	c_1	c_1	c_3	s_3	s_3	s_1
c_2	c_1	c_2	c_3	c_2	c_1	s_1	s_1	s_2
c_3	c_2	c_1				s_2	s_2	s_3

Izvor: Haeringer & Klijn, 2009

Da bismo u algoritmu odloženog prihvatanja sa ograničenom dužinom liste preferencija dobili stabilno uparivanje, potrebno je da prioriteti škola ispunjavaju H. Ergin-ov uslov acikličnosti (2002). U algoritmu najviših ciklusa trgovanja, ne ostvaruje se stabilna alokacije čak i kad nema ograničenja na dužinu liste preferencija. Stoga je u ovom slučaju neophodno da prioriteti škola ispune stroži uslov koji se naziva O. Kesten-ov uslov acikličnosti (2006). Ovi uslovi sadrže dva poduslova. Ciklični uslov se zasniva na tome da prioriteti škola formiraju ciklus, tako da, na primer, učenik 1 ima veći prioritet u školi 1 od učenika 3, dok u školi 2 učenik 3 ima veći prioritet od učenika 1. Ukoliko obe škole imaju iste prioritete ciklični uslov nikad nije ispunjen. Drugi poduslov je uslov retkosti koji se sastoji u tome da postoji značajan broj učenika koji konkurišu za mesta u školama. Ako svaka škola ima broj mesta koji je jednak broju učenika, uslov retkosti nikad nije ispunjen. Kako se smanjuje broj mesta u školi u odnosu na ukupan broj učenika, povećava se konkurencija za raspoloživa mesta.

Da bi alokacija koja se ostvaruje u algoritmu najviših ciklusa trgovanja bila efikasna uz ograničenu dužinu liste preferencija, potrebno je da prioriteti škola ispunjavaju uslov *X*-acikličnosti, dok je za efikasnost u algoritmu odloženog prihvatanja potreban stroži uslov za prioritete škola koji se naziva jaka *X*-acikličnost.

PROBLEM INDIFERENTNOSTI

U dosadašnjem izlaganju polazili smo od pretpostavke da škole imaju striktne prioritete kad rangiraju učenike. Međutim, u stvarnosti učenici pripadaju prioritetnim grupama, pri čemu su škole indiferentne prema učenicima iz iste grupe, dok između različitih grupa postoji striktan prioritet. Algoritme uparivanja nije moguće primeniti u slučaju kad prioriteti nisu striktni, pa je potrebno relaciju slabog prioriteta transformisati u relaciju striktnog prioriteta. Jedna mogućnost za razrešenje indiferentnosti koju koriste A. Erdil i H. Ergin (2008) je da se učenicima koji imaju manji indeks u okviru iste prioritetne grupe daje veći prioritet. Na primer, ako istoj grupi pripadaju učenici 1, 2 i 3, učenik 1 ima najveći prioritet, zatim, učenik 2, pa učenik 3. Ovakvo proizvoljno pravilo za razrešenje indiferentnosti ne garantuje da će alokacija koja se ostvaruje u algoritmu odloženog prihvatanja biti stabilna. Stoga, A. Erdil i H. Ergin (2008) predlažu upotrebu stabilnog ciklusa poboljšanja, kako bi se od proizvoljnog uparivanja došlo do stabilnog uparivanja.

Pored prethodno navedene mogućnosti, za razrešenje indiferentnosti u izboru škole, A. Abdulkardiroglu, P. Pathak i A. Roth (2009) koriste jedinstveno i višestruko pravilo za razrešenje indiferentnosti. Kod višestrukog pravila (DA-*Multiple Tie Breaking*-MTB) svakom učeniku se dodeljuje poseban lutrijski broj za različite škole, dok se kod jedinstvenog pravila (DA-*Single Tie Breaking*-STB) svakom učeniku dodeljuje isti lutrijski broj za različite škole. Moguće je dokazati da je prosečan rang škole u koju su upisani učenici viši na listi njihovih preferencija u DA-STB nego u DA-MTB.

Svi navedeni načini za razrešenje indiferentnsti imaju zajedničku osobinu da učenici nemaju nikakav uticaj na generisanje stiktnih priroriteta na osnovu slabih prioriteta. Dalje usavršavanje načina za razrešenje indiferentnosti nas dovodi do algoritma odloženog prihvatanja u kome učenici imaju mogućnost da svojim izborom utiču na razrešavanje indiferentnosti. Ovaj algoritam su konstruisali A. Abdulkadiroglu, Y-K. Che i Y. Yasuda (2015), pod nazivom algoritam odloženog prihvatanja sa mogućnošću izbora (*Choice-Augmented Deferred Acceptance*-CADA).

Pojednostavljeno objašnjenje načina na koji funkcioniše ovaj algoritam možemo da prikažemo pomoću primera u kome imamo tri učenika i tri škole, pri čemu svaka škola može da upiše jednog učenika. Svi učenici pripadaju istoj prioritetnoj grupi, što znači da su škole indiferentne između njih. Učenici imaju sledeće kardinalne korisnosti za različite škole (Tabela 30).

Tabela 30 Kardinalne korisnosti i izbor škole

	$u(s_1)$	$u(s_2)$	$u(s_3)$
c_1	4	4	3
c_2	1	1	2
c_3	0	0	0

Izvor: Abdulkadiroglu, Che & Yasuda, 2015

Prvo ćemo odrediti alokaciju u algoritmu odloženog prihvatanja u kome se indiferentnost razrešava tako što svaki učenik dobija lutrijski broj iz uniformne raspodele. Uz ovakav način generisanja striktnih prioriteta, učenik ima identičnu verovatnoću od 1/3 da bude upisan u bilo koju školu, tako da svaki učenik ostvaruje očekivanu korisnost od 5/3. Međutim, u ovom slučaju, postoji mogućnost za poboljšanje u Paretovom smislu. Učenik 3 ima veći nivo korisnosti ako je upisan u školu 2 koja je njegov drugi najbolji izbor u odnosu na učenike 1 i 2, tako da je uparivanje u kome je učenik 3 sigurno upisan u školu 2, dok su učenici 1 i 2 upisani u škole 1 i 3 sa verovatnoćom 1/2, superiorno u Paretovom smislu u odnosu na početnu situaciju kad svi učenici učestvuju u lutriji. U poslednjem slučaju, svaki učenik ima očekivanu korisnost od 2, što je viši nivo korisnosti od 5/3. Da bismo došli do ovog uparivanja, potrebno je da svakom učeniku ponudimo izbor između sigurnog upisa u školu 2 i lutrije u kojoj može da se upiše u prvu i treću školu sa podjednakom verovatnoćom. Učenici 1 i 2 će izabrati lutriju, dok će učenik 3 izabrati siguran upis u školu 2.

Uparivanje koje smo prethodno opisali je moguće ostvariti primenom algoritma odloženog prihvatanja sa mogućnošću izbora. U ovom algoritmu učenici navode listu svojih preferencija kao i jednu ciljnu školu. Kod razrešenja indiferentnosti u određenoj školi prioritet imaju učenici koji su tu školu naveli kao ciljnu. Nakon ovoga, svaki učenik dobija dva lutrijska broj koja se izvlače iz uniformne raspodele. Prvi slučajni broj koji dobija učenik je ciljni lutrijski broj, a drugi je regularni lutrijski broj. Prilikom određivanja striktnih prioriteta, prvo se uzima u obzir ciljni lutrijski broj, a zatim regularni lutrijski broj. Nakon razrešenja indiferentnosti na ovaj način, primenjuje se algoritam odloženog prihvatanja.

Generisanje striktnih prioriteta na osnovu ciljnog i regularnog lutrijskog broja možemo da ilustrujemo na primeru u kome imamo deset učenika i dve škole. Učenici: 1, 3, 5, 7 i 9 navode školu 1 kao ciljnu, a učenici: 2, 4, 6, 8 i 10 navode školu 2 kao ciljnu. Pretpostavimo da su učenicima dodeljeni sledeći ciljni: *T(I)*, i regularni: *R(I)*, lutrijski brojevi:

T(I): 7, 1, 2, 8, 3, 4, 9, 5, 6, 10; R(I): 7, 2, 4, 3, 5, 8, 9, 6, 10, 1.

Za učenike sa neparnim indeksom, koji su naveli školu 1 kao ciljnu, prioritet se određuje na osnovu ciljnog lutrijskog broja, tako da je prioritet ovih učenika u prvoj školi: 7, 1, 3, 9, 5. Nakon ovoga, određuje se prioritet učenika koji nisu naveli školu 1 kao ciljnu na osnovu regularnog lutrijskog broja, tako da je potpuni redosled prioriteta u prvoj školi: 7, 1, 3, 9, 5, 2, 4, 8, 6, 10. Drugu školu su kao ciljnu naveli učenici sa parnim indeksom, i na osnovu ciljnog lutrijskog broja prioritet ovih učenika je: 2, 8, 4, 6, 10. Zatim se određuje prioritet ostalih učenika na osnovu regularnog lutrijskog broja, pa je ukupan prioritet u drugoj školi: 2, 8, 4, 6, 10, 7, 3, 5, 9, 1.

Na osnovu simulacione analize, A. Abdulkadiroglu, Y-K. Che i Y. Yasuda (2015) dokazuju da je, u algoritmu odloženog prihvatanja sa višestrukim pravilom za razrešenje indiferentnosti, manji broj učenika upisan u školu koja je njihov najbolji izbor, u odnosu na algoritam odloženog prihvatanja sa jedinstvenim pravilom za razrešenje indiferentnosti i algoritam odloženog prihvatanja sa mogućnošću izbora. Što se tiče poređenja poslednja dva algoritma, kad se uporedi broj učenika koji su upisani u školu koja je njihov najbolji izbor, može se utvrditi da ne postoji značajna razlika između njih. Ipak, algoritam odloženog prihvatanja sa mogućnošću izbora ima prednost nad algoritmom odloženog prihvatanja sa jedinstvenim pravilom za razrešenje indiferentnosi kad su u pitanju učenici koji su upisani u školu koja je njihov *k*-ti najbolji izbor, jer ovi učenici ostvaruju veću korisnost u CADA algoritmu.

ZAKLJUČAK

U ovom radu smo predstavili najznačajnije rezultate uparivanja učenika i škola koristeći pojednostavljene primere, čime je ova oblast učinjena pristupačnom široj čitalačkoj publici. Videli smo da postoje i određeni ograničavajući faktori u primeni algoritama uparivanja. Pre svega, algoritam odloženog prihvatanja ne dovodi do efikasne alokacije, što je njegov najveći nedostatak. Drugi značajan ograničavajući faktor u primeni algoritama uparivanja je ograničenje dužine liste preferencija koje učenici mogu da navedu, što narušava stabilnost uparivanja. Sa praktičnog aspekta, trebalo bi omogućiti učenicima da imaju mogućnost da navedu dovoljan broj škola kako dužina liste preferencija ne bi bila ograničavajući faktor. U stvarnosti, najveći broj učenika navodi nekoliko škola koje želi da upiše, tako da se ispostavlja da ograničenje dužine liste preferencija nije toliko značajan problem u praktičnoj primeni.

U radu smo pokazali da je moguće primeniti kooperativnu teoriju igara na probleme uparivanja. Pored toga, videli smo da je moguće kreirati kompatibilno-podsticajan mehanizam u kome učenici istinito saopštavaju svoje preferencije.

Ovaj rad ima važne implikacije u pogledu dvosmernog odnosa između teorijskih modela i prakse. S jedne strane, odsustvo cenovnog mehanizma nametnulo je potrebu za kreiranje alternativnih pravila koja bi predstavljala supstitut za tržište. S druge strane, postojeća teorijska znanja iz kooperativne teorije igara i oblikovanja ekonomskog mehanizma omogućila su da ovaj cilj bude ostvaren i da se nađe rešenje za problem koji se pojavio.

Algoritmi uparivanja su se pokazali kao vrlo uspešni za određivanje optimalne alokacije u situacijama kad tržišni mehanizam nije moguće primeniti iz zakonskih ili etičkih razloga. Pored primene na uparivanje učenika i škola, algoritmi su vrlo uspešno primenjeni na uparivanje lekara koji stažiraju i bolnica, uparivanje donora organa i pacijenata, alociranje parking mesta ili kancelarija na korisnike, itd. Pored uparivanja učenika i škola, posebno je značajna primena u uparivanju donora organa i pacijenata gde je značajno umanjen problem nekompatibilnosti.

Uparivanje učenika i škola je od velikog značaja u Republici Srbiji, s obzirom na to da se još uvek primenjuje algoritam trenutnog uparivanja, pa ovaj rad ukazuje na poboljšanja koja bi se mogla ostvariti primenom algoritma odloženog prihvatanja.

Stoga bi za buduće istraživanje bilo interesantno proveriti koliki porast blagostanja učenika bi mogao da bude ostvaren da je umesto algoritma trenutnog uparivanja korišćen algoritam odloženog prihvatanja. Ipak, ograničavajući faktor u ovoj analizi zasnovanoj na istorijskim podacima je što je moguće koristiti samo informacije o navedenim preferencijama, a poznato je da algoritam trenutnog uparivanja ne dovodi do istinitog otkrivanja preferencija. Dakle, na osnovu istorijskih podataka bi bilo moguće utvrditi porast blagostanja za navedene preferencije, tj. porast blagostanja uz navedeno ograničenje.

REFERENCE

Abdulkadiroğlu, A. (2013). School choice. In N. Vulkan, A. E. Roth & Z. Neeman (Eds.), *The Handbook of Market Design* (pp. 138-169). Oxford, UK: Oxford University Press.

Abdulkadiroğlu, A., Che, Y-K., & Yasuda, Y. (2015). Expanding "choice" in school choice. *American Economic Journal: Microeconomics*, *7*(1), 1-42. doi: 10.1257/mic.20120027

Abdulkardiroğlu, A., & Sönmez, T. (2003). Social choice: A mechanism design approach. *American Economic Review*, *93*(3), 729-747. doi: 10.1257/000282803322157061

Abdulkardiroğlu, A., Pathak, P., & Roth, A. (2005*a*). The New York city high school match. *American Economic Review*, *95*(2), 364-367. doi: 10.1257/000282805774670167

Abdulkardiroğlu, A., Pathak, P., Roth A., & Sönmez, T. (2005*b*). The Boston public school match. *American Economic Review*, *95*(2), 368-371. doi: 10.1257/000282805774669637

Abdulkardiroğlu, A., Pathak, P., & Roth, A. (2009). Strategy-proofness *versus* efficiency in school choice with indifferences: Redesigning the NYC school match. *American Economic Review*, *99*(5), 1954-1978. doi: 10.1257/aer.99.5.1954

Backović, M. i Popović, Z. (2012). *Matematičko modeliranje i optimizacija*. Beograd, Republika Srbija: Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu.

Backović, M., Popović, Z., & Stamenković, M. (2016). Reflexive game theory approach to mutual insurance problem. *Montenegrin Journal of Economics*, *12*(3), 87-100. doi: 10.14254/1800-5845.2016/12-3/6

Erdil, A., & Ergin, H. (2008). What's the matter with tie-breaking? Improving efficiency in school choice. *American Economic Review*, *98*(3), 669-689. doi: 10.1257/aer.98.3.669

Ergin, H., & Sönmez, T. (2006). Games of school choice under Boston mechanism. *Journal of Public Economics*, *90*(1-2), 215-237. doi:10.1016/j.jpubeco.2005.02.002

Ergin, H. (2002). Efficient resource allocation on the basis of priorities. *Econometrica*, *70*(6), 2489-2497. doi: 10.1111/j.1468-0262.2002.00447.x

Gale, D., & Shapely, L. (1962). College admission and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, *69*(1), 9-15.

Gale, D., & Scarf, H. (1974). On cores and indivisibility. *Journal of Mathematical Economics*, 1, 23-37.

Haeringer, G., & Klijn, F. (2009). Constrained school choice. *Journal of Economic Theory*, *144*(5), 1921-1947. doi.org/10.1016/j.jet.2009.05.002

Hafalir, I., Yenmez B., & Yildirim, M. (2013). Effective Affirmative Action in School Choice. *Theoretical Economics 8*(2), 325-363. doi: 10.3982/te1135

Hatfield, J. W., Kojima, F., & Narita, Y. (2017). Promoting school competition through school choice: A market design approach. *Journal of Economic Theory.* (Forthcoming)

Kesten, O. (2006). On two competing mechanisms for priority based allocation problems. *Journal of Economic Theory*, *127*, 155-171. doi: 10.1016/j.jet.2004.11.001

Kesten, O. (2010). School choice with consent. *Quarterly Journal of Economics*, *125*(3), 1297-1348. doi: https://doi.org/10.1162/qjec.2010.125.3.1297

Kojima, F. (2012). School choice: Impossibilities for affirmative action. *Games and Economic Behavior*, *75*(2), 685-693. doi.org/10.1016/j.geb.2012.03.003

Kojima, F., & Pathak, P. (2009). Incentives and stability in large two-sided matching markets. *American Economic Review*, *99*(3), 608-627. doi: 10.1257/aer.99.3.608

Kojima, F., & Ünver, U. (2014). The "Boston" school-choice mechanism: An axiomatic approach. *Economic Theory*, *55*(3), 515-544. doi:10.1007/s00199-013-0769-8

Pathak, P., & Sönmez, T. (2008). Leveling the playing field: Sincere and sophisticated players in the the Boston mechanism. *American Economic Review*, *98*(4), 1636-1652. doi: 10.1257/aer.98.4.1636

Roth, A. (1985). The college admission problem is not equivalent to the marriage problem. *Journal of Economic Theory*, *36*(2), 277-288. doi: 10.1016/0022-0531(85)90106-1

Roth, A. (2015). *Who Gets What - And Why*. New York, NY: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Sönmez, T. (1997). Manipulation *via* capacities in two-sided matching markets. *Journal of Economic Theory*, *77*(1), 197-204. doi.org/10.1006/jeth.1997.2316

Primljeno 18. aprila 2017,
nakon revizije,
prihvaćeno za publikovanje 23. avgusta 2017.
Elektronska verzija objavljena 25. avgusta 2017.

Dejan Trifunović je vanredni profesor na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Izvodi nastavu na nastavnim predmetima Teorija cena, Industrijska organizacija i Mikroekonomija. Oblast naučnog interesovanja je vezana za teoriju igara, aukcije, uparivanje, asimetrične informacije i mrežne eksternalije.

MATCHING STUDENTS TO SCHOOLS

Dejan Trifunovic
Faculty of Economics, University of Belgrade, Belgrade, The Republic of Serbia

In this paper, we present the problem of matching students to schools by using different matching mechanisms. This market is specific since public schools are free and the price mechanism cannot be used to determine the optimal allocation of children in schools. Therefore, it is necessary to use different matching algorithms that mimic the market mechanism and enable us to determine the core of the cooperative game. In this paper, we will determine that it is possible to apply cooperative game theory in matching problems. This review paper is based on illustrative examples aiming to compare matching algorithms in terms of the incentive compatibility, stability and efficiency of the matching. In this paper we will present some specific problems that may occur in matching, such as improving the quality of schools, favoring minority students, the limited length of the list of preferences and generating strict priorities from weak priorities.

Keywords: matching, Boston algorithm, deferred acceptance algorithm, top trading cycles

JEL Classification: C78