Ekonomski horizonti, Maj - Avgust 2013, Godište XV, Sveska 2, 163 - 172
UDC: 33 ISSN: 1450-863 X eISSN: 2217-9232

Pregledni članak
UDK: 005.334:368.025.6 ; 347.426.6
doi: 10.5937/ekonhor1302163D

KOLEKTIVNI MODEL RIZIKA U NEŽIVOTNOM OSIGURANJU

Zlata Đurić*

Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu

Poslovanje osiguravajućih društava, bazirano na preuzimanju različitih profila rizika, praćeno je fluktacijom poslovnog okruženja. Kompleksnost predviđanja finansijskog efekta zahteva za odštetama u neživotnom osiguranju leži u samoj strukturi obaveza osiguravača, čija visina ne može biti određena u trenutku naplate premije. Analizom ključnih procesa osiguranja, teorija rizika fokusira se na modeliranje potraživanja, kao finansijskih posledica nepredvidivih događaja. Pored toga, ona daje i odgovor na pitanje koliku premiju treba naplatiti da bi se izbegao bankrot, pa samim tim, predstavlja kompleksnu i aktuelnu istraživačku oblast. U radu su predstavljeni osnovni rezultati kolektivnog modela rizika za ključne procese poslovanja neživotnih osiguravajućih društava: proces prebrajanja zahteva za odštetama i proces ukupne sume isplaćenih odšteta. Ovi procesi se, u teoriji rizika, tretiraju kao stohastički procesi, što pruža širok dijapazon mogućnosti za modeliranje i simulaciju konkretnih poslovnih problema.

Ključne reči: neživotno osiguranje, teorija rizika, stohastički proces, Poisson-ov proces, principi obračuna premije

JEL Classification: C13, C43, C46

UVOD

Suočavanje sa rizicima je generisalo formiranje i funkcionisanje osiguravajućih društava koja, svojim korisnicima, pružaju mogućnost disperzije i minimiziranja gubitaka. Osiguranici prenose svoje rizike na osiguravača, koji, formirajući dovoljno velike grupe srodnih rizika, gubitak svakog osiguranika smanjuje, uplatom odgovarajuće premije. Osnovni uzrok svih dilema neživotnih osiguravača leži u činjenici da se premije uplaćuju pre nastupanja bilo kakvog nepovoljnog događaja, pa je neophodno proceniti kolika je verovatnoća realizacije, kao i monetarni iznos gubitka, koji mora biti kompenzovan. Teorija verovatnoće i statistike osiguravačima pruža osnov da nesrećne događaje posmatraju kao pojave koje se, zbog određenih pravilnosti, mogu predviđati i modelirati (Embrechts & Klüppelberg, 1993). Primena teorije rizika u neživotnom osiguranju predstavlja još moćniji instrument za analiziranje i definisanje sve kompeksnijih rizika poslovanja. Preuzimanje različitih rizika, inicira sledeća tri osnovna pitanja, na koja, prvenstveno, aktuari neživotnog osiguranja moraju fokusirati svoju pažnju, da bi adekvatno izvršili zaštitu korisnika:

* *Korespondencija:* Z. Đurić, Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu, Đ. Pucara 3, 34000 Kragujevac, Srbija; e-mail: zdjuric@kg.ac.rs

- Koliko preuzetih rizika se može realizovati u određenom vremenskom intervalu, odnosno, koliko zahteva za nadoknadama mogu očekivati na osnovu naplaćenih polisa?
- Koliki novčani iznos treba obezbediti za isplatu pristiglih potraživanja, odnosno, kolika je prosečna očekivana visina potraživanja?
- Koliku premiju treba naplatiti od osiguranika, koja bi apsorbovala nastala potraživanja, ali i obezbedila prihod osiguravačima?

Primena teorije rizika u neživotnom osiguranju, praćena je primedbama na ograničeni, praktični značaj u poslovnom svetu, tako da je dugo bila ignorisana a teorijski i matematički razvijana uglavnom kod skandinavskih naučnika. Međutim, danas ona predstavlja veliki istraživački izazov za brojne matematičare, ali i aktuare, zbog širokog okvira i logičnog konteksta unutar kojeg se prirodne fluktacije, koje nastupaju u realnim poslovnim procesima, mogu simulirati.

Solventnost II, kao nov, ažurirani skup regulatornih uslova za osiguravajuća društva, koja posluju u Evropskoj uniji, zahteva kompletan tretman rizika i merenje solventnosti zasnovano na riziku, što je aktuelizovalo primenu teorije rizika. Pored tradicionalnih metoda, sve je prisutnija potreba za novim, dinamičkim pristupom, koji je baziran na stohastičkom konceptu ostvari.vanja štetnih događaja.

Osiguravači su, generalno, zainteresovani za ukupne isplate koje mogu uslediti iz portfolia osiguranja. Ukoliko se sadašnja vrednost ukupnih mogućih isplata posmatra kao zbir pojedinačnih isplata, radi se o individualnom modelu rizika. Drugi model, koji posmatra agregatne iznose potraživanja, koja nastaju iz svih naplaćenih polisa, poznat je kao kolektivni model rizika, koji je novijeg porekla, ali je zbog svoje aplikativnosti u značajnoj meri nadmašio stariji, individualni model.

Predmet ovog rada je modeliranje ključnih procesa u poslovanju osiguravajućih društava: procesa prebrajanja zahteva za isplatu šteta i procesa ukupne sume isplaćenih odšteta. Cilj rada je da prezentira prednosti i mane kolektivne teorije rizika u analiziranju ovih problema, ukazujući na mogućnosti njihove primene i pravce daljeg razvoja. Samim tim, ključna hipoteza od koje se u radu polazi je: teorija rizika, iako nije mnogo aplikativna u praktičnom radu, pruža širok okvir za praćenje, analiziranje i predviđanje brojnih rizičnih situacija i daje smernice za ublažavanje i prevazilaženje problema koji mogu nastupiti.

Polazeći od definisanog predmeta i cilja, u radu će biti prvo predstavljen opšti model teorije rizika u neživotnom osiguranju, zatim, biće analizirana primena Poisson-ovog procesa i njegovih modifikacija u procesu prebrajanja zahteva. Integracijom ovog i procesa ukupne sume isplaćenih šteta, polje istraživanja postaje vrlo kompleksno, ali dominantno pri postavljanju osnovnih principa kvantifikovanja premije.

KOLEKTIVNI MODEL RIZIKA

Matematički modeli u teoriji neživotnog osiguranja, analiziraju potraživanja za odštetama, na osnovu kojih daju odgovor na pitanje koliku premiju treba naplatiti da bi se izbegao bankrot. Potraživanja pristigla u osiguravajuće društvo mogu biti tretirana kao slučajne promenljive, koje preslikavaju skup ishoda realizacije nepovoljnih osiguranih događaja (potraživanja) na skup realnih brojeva (monetarni iznos isplata), odnosno, kao preslikavanja $X\colon\ \Omega \to R$, gde je Ω skup elementarnih događaja, a R skup realnih brojeva. Način i verovatnoća nastupanja potraživanja, odnosno, monetarnih isplata, predstavljaju raspored verovatnoća ovih slučajnih promenljivih. Svakoj slučajno promenljivoj možemo pridružiti funkciju rasporeda, F_X, koja ne opisuje stvarni ishod slučajne promenljive X, već nam ukazuje na to kako su raspoređene moguće vrednosti za X. Funkcija $F_X(x)\colon R \to [0,1]$, definisana sa

$F_X(x) = P(\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x) = P(X \le x)$, za $x \in R$, je funkcija rasporeda slučajne promenljive X i predstavlja verovatnoću da slučajna promenljiva X uzme vrednosti manje od ili jednaku x. U kontekstu osiguranja, ukoliko slučajna promenljiva predstavlja iznos potraživanja nekog osiguranika, funkcija rasporeda je verovatnoća da ukupan iznos štete posmatranog osiguranika bude manji ili jednak nekom fiksiranom iznosu x. Za neprekidnu slučajnu promenljivu, funkcija rasporeda je $F_X(x)=P(X \le x)=\int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx, \quad x \in R$, gde je *g(x)* funkcija gustine rasporeda verovatnoća. Najvažnije numeričke karakteristike slučajne promenljive dobijamo pomoću očekivane vrednosti i varijanse. Očekivana vrednost, ili očekivanje diskretne slučajne promenljive, je: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, dok je za neprekidnu slučajnu promenljivu $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx$. Varijansa je, često, korišćena kao jedan od indikatora homogenosti populacije ili uzorka. Za diskretnu slučajnu promenljivu, varijansa je:

$Var(X)=\sigma^2=E(X-E(X))^2$, tako da ona predstavlja meru odstupanja slučajne promenljive od njene očekivane vrednosti. Za neprekidnu slučajnu promenljivu varijansa je: $\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 \cdot g(x)dx$.

Pojam slučajne promenljive je nezavisan od vremena. Međutim, dosta procesa u poslovanju treba analizirati i pratiti njihove slučajne realizacije u vremenu, tako da je neophodno uključiti i vremensku komponentu. Slučajna promenljiva *X*, čije se realizacije prate u vremenu označava se sa: X_t ili *X(t)*. Ako je $T \subset R$ skup vremena, tada za svako $t \in T$ je određena familija slučajnih promenljivih X_t, koja definiše stohastički proces. Stohastički proces $X = \{X_t,\ t \in R\}$ može se tretirati i kao funkcija dve promenljive i definisati sa X: $T \times \Omega \to K$, gde je *K* skup stanja, odnosno, skup koji sadrži sve vrednosti posmatranog procesa. Za izabrano vreme $t \in T$ i elementarni događaj $\omega \in \Omega$, realizacija procesa se označava sa *X(t,ω)*. Samim tim, ako fiksiramo vreme, tada je funkcija $\omega \to X(t,\omega)$ slučajna promenljiva koja opisuje realizacije procesa u budućem trenutku *t*, a u slučaju da fiksiramo događaj $\omega \in \Omega$, tada funkcija $t \to X(t,\omega)$ opisuje realizaciju procesa *X* tokom vremena. Ova funkcija vremena je realizacija ili trajektorija stohastičkog procesa. Pri tome, ako je skup *T* prebrojiv, radi se o diskretnom slučajnom procesu ili o nizu slučajnih promenljivih dok, u suprotnom, imamo neprekidan proces.

Za modeliranje procesa neophodno je uvesti pretpostavke koje su realne i verno opisuju osnovne karakteristike problema, ali takve da se mogu matematički formulisati i da se njihova svojstva i implikacije lako mogu dokazati. "U kolektivnom modelu rizika se polazi od sledećih hipoteza (Ramasubramanian, 2005, 2):

1. Ukupan broj zahteva, *B*, pristiglih u datom vremenu, je slučajna promenljiva. Zahtevi pristižu u osiguravajuće društvo u vremenima $\{Ti\}$, za koja važi $0 \le T_1 \le T_2 \le \dots$, i ona predstavljaju vremena dospeća zahteva;

2. Svaki zahtev, pristigao u vremenu Ti indukuje isplatu štete X_i, odnosno, iznos potraživanja. Niz $\{X_i\}$ je niz nenegativnih, nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom funkcijom rasporeda;

3. Proces veličine zahteva $\{X_i\}$ i proces vremena dospeća $\{Ti\}$ su međusobno nezavisni. Takođe, proces veličine i broja zahteva, $\{X_i\}$ i *B* su nezavisni."

Dva najvažnija procesa koji prate poslovanje osiguravača su proces broja zahteva i proces ukupne sume isplaćenih šteta. Kako se oba procesa prate u vremenu, oni predstavljaju stohastičke procese. Pri tome, proces broja zahteva, odnosno, proces broja nastalih šteta definiše se sa:

$$B(t)=max\{i \ge 0 : T_i \le t\} \qquad (1)$$

i predstavlja broj zahteva pristiglih u vremenu $t \ge 0$, dok proces ukupne sume isplaćenih šteta je

$$Z(t)=X_1+\dots+X_{B(t)}=\sum_{i=1}^{B(t)} X_i,\ t \ge 0. \qquad (2)$$

Kako je deterministički indeks *n*, parcijalne sume $Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, zamenjen slučajnom promenljivom *B(t)*, proces $Z=(Z(t),\ t \ge 0)$ je slučajan proces parcijalne sume, koji se često naziva i složen ili zbirni proces.

MODELIRANJE PROCESA BROJA ZAHTEVA

Centralno i dominantno mesto u matematici neživotnog osiguranja, a posebno u teoriji kolektivnog rizika, zauzima Poisson-ov proces, koji je uveo F. Lundberg (1932) kao model za proces prebrajanja zahteva $\{B(t): t \geq 0\}$, gde je $B(t)$ slučajna promenljiva.

Prema klasičnoj definiciji teorije verovatnoće, za neku celobrojnu slučajnu promenljivu Y se kaže da ima Poisson-ov raspored ako je: $P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, za $k \in \{0,1,2...\}$ i $\lambda > 0$. Poisson-ova slučajna promenljiva se koristi kao model za broj telefonskih poziva u jedinici vremena, broj automobila ili autobusa koji su prošli kroz neku tačku u jedinici vremena, broj korisnika koji su pristupili nekoj internet stranici, broj radioaktivnih čestica u jedinici vremena, itd. Ona ima veoma retku, ali vrlo korisnu osobinu da je $E(Y) = var(Y) = \lambda$.

Poisson-ov proces prati realizaciju pojavljivanja određenog događaja tokom vremena i trenutke u kojima se događaj desio, tako da je našao široku primenu za modeliranje retkih događaja, odnosno događaja za koje u kratkom vremenskom intervalu je moguća najviše jedna realizacija. "Poisson-ov proces je slučajan proces, definisan na vremenskom skupu, kao familija slučajnih promenljivih $\{B(t)\}, t \in T$, gde je skup $T = [0,+\infty)$, ako je ispunjeno (Ramasubramanian, 2005, 3):

(1) $B(t)$ je nenegativna celobrojna slučajna promenljiva za koju važi $B(0) \equiv 0, \forall t \geq 0$, što znači da ne postoji potraživanje u vremenu $t = 0$;

(2) $\{B(t): t \geq 0\}$ je neopadajući proces, odnosno ako je $0 \leq s < t$ tada je $B(t) \leq B(s)$, gde $B(t) - B(s)$ označava broj zahteva pristiglih u vremenskom intervalu (s , t];

(3) $\{B(t): t \geq 0\}$ ima nezavisne priraštaje, tako da za $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ broj zahteva pristiglih u disjunktnim vremenskim intervalima $B(t_1)$, $B(t_2) - B(t_1)$, ..., $B(t_n) - B(t_{n-1})$, za $n = 1, 2, ...$ su nezavisne slučajne promenljive;

(4) verovatnoća pristizanja određenog broja zahteva u nekom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala, tako da proces prebrajanja ima stacionarne priraštaje, tj. za $0 \leq s < t$ i $h > 0$, nezavisne slučajne promenljive $B(t) - B(s)$ i $B(t+h) - B(s+h)$ imaju isti raspored;

(5) verovatnoća pristizanja dva ili više zahteva u određenom vremenskom intervalu je zanemarljivo mala, odnosno, $P(B(h) \geq 2) = o(h)$, tj. $P(B(t+h) - B(t) \geq 2) = o(h)$, gde $o(h)$ predstavlja beskonačno malu veličinu sa osobinom $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$;

(6) u veoma kratkom vremenskom intervalu, verovatnoća pristizanja jednog zahteva je približno proporcionalna dužini intervala, tako da postoji $\lambda > 0$ takvo da $P(B(h)=1) = \lambda h + o(h)$, kada $h \to 0$. Broj λ predstavlja stopu pristizanja zahteva."

Iako Poisson-ov proces nije najrealniji proces za prebrajanje zahteva, zbog brojnih atraktivnih i aplikativnih osobina, razvijanih i dokazivanih više decenija, on predstavlja referentnu tačku u modeliranju. Limitiranost standardnog Poisson-ovog procesa se može ublažiti, i sami modeli proširiti, raznim modifikacijama standardnog Poisson-ovog procesa, koje je detaljno analizirao J. F. C. Kingman (1993). Time se za modeliranje procesa prebrajanja zahteva pojavljuju još dva, dosta šira i realnija procesa: proces obnavljanja i mešoviti Poisson-ov proces.

"Za formulisanje i matematičko modeliranje procesa prebrajanja potraživanja, polazi se od prirodnih, ali i neophodnih, sledećih pretpostavki (Minkowa, 2010, 31):

- $B(t) \geq 0$
- $B(t)$ je ceo broj
- ako je $0 \leq s < t$, tada je $B(t) \leq B(s)$,
- $B(t) - B(s)$, za $s < t$, predstavlja broj zahteva pristiglih u intervalu $(s, t]$."

Definicija Poisson-ovog procesa implicira da, za svaki stohastički proces, a samim tim i proces prebrajanja zahteva $\{B(t): t \geq 0\}$ i za $s \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ važi:

$$P(B(t+s) - B(s) = k) = $$
$$= P(B(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{3}$$

odnosno, proces prebrajanja zahteva je homogen Poisson-ov proces sa stopom pristizanja zahteva λ, gde je λ konstanta. Dokaz i različiti pristupi izvođenju ovog rezultata mogu se naći u radovima brojnih autora, kao što su N. L. Bowers i ostali (1997), C. T. Daykin i ostali (1994), S. Klugman i ostali (1998).

Za proces prebrajanja zahteva, sa aspekta osiguranja, bitno je i vreme između pristizanja dva uzastopna zahteva. Ako vreme pristizanja n-tog zahteva, odnosno vreme čekanja do prispeća n-tog zahteva definišemo sa:

$$T_n = inf\left\{t \geq 0 : B(t) = n\right\},\ n = 1,2,..,\ T_0 = 0, \quad (4)$$

njemu možemo pridružiti niz vremena između dospeća dva uzastopna zahteva A_i, definisano sa $A_i = T_i - T_{i-1}$. Analogno ovim definicijama imamo da

$$\forall s : \{T_1 > s\} = \{B(s) = 0\} \quad (5)$$

odakle je

$$P(A_1 > s) = P(B(s) = 0) = e^{-\lambda s} \quad (6)$$

Induktivno se dobija da za Poisson-ov proces $\{B(t) : t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ, slučajne promenljive A_i su nezavisne slučajne promenljive koje imaju eksponencijalni raspored sa parametrom λ tj A_i: $\mathcal{E}(\lambda)$, tako da je $E(A_i) = \frac{1}{\lambda}$, $\forall i, \lambda > 0$.

Kako $T_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ predstavlja zbir slučajnih promenljivih sa eksponencijalnim rasporedom, znači da vreme pristizanja n-tog zahteva T_n ima gama raspored, T_n: $\Gamma(n, \lambda)$ (Rolski, et al, 1999).

Jedna od ključnih karakteristika Poisson-ovog procesa $\{B(t) : t \geq 0\}$ je činjenica da je vreme između prispeća dva uzastopna zahteva slučajna promenljiva sa eksponencijalnim rasporedom sa stopom λ. Druga bitna karakteristika procesa $\{B(t) : t \geq 0\}$ je da su ova vremena nezavisna. Ove dve karakteristike nam daju još jedan način uopštavanja Poisson-ovog procesa. Naime, možemo pretpostaviti da nenegativne, nezavisne slučajne promenljive A_i, sa istim rasporedom mogu imati ma koji, bilo diskretan ili apsolutno neprekidan raspored. Ova pretpostavka nas dovodi do procesa obnavljanja (Asmussen, 2000), koji daje veću fleksibilnost u izboru rasporeda za vremena A_i. Za razliku od Poisson-ovog procesa, gde $B(t)$ ima Poisson-ov raspored za svako t, kod procesa obnavljanja ovo svojstvo ne važi, tako da raspored za $B(t)$ u principu nije poznat, pa se određivanje verovatnoće događaja $B(t) = n$ svodi na određivanje očekivanja slučajne promenljive $B(t)$ (Panjer & Willmot, 1992).

Takođe, kako za vreme pristizanja n-tog zahteva, $T_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$, važi relacija:

$$T_n \leq s \Leftrightarrow B(t) = n \quad (7)$$

U opštem slučaju teško je odrediti i raspored za T_n, ali se zna da: ako A_i : $\mathcal{E}(\lambda)$ tada T_n: $\Gamma(n, \lambda)$ a ako A_i : $Poi(\lambda)$ tada T_n: $Poi(n, \lambda)$. Istraživanja brojnih naučnika na polju procesa obnavljanja (Kling & Goovaerts, 1993) dovela su do moćne matematičke teorije - teorije obnavljanja, koja omogućava da se sasvim precizno odredi očekivani broj zahteva $E(B(t))$ za veliko t. Prema strogom zakonu velikih brojeva, ako je očekivanje vremena prispeća dva uzastopna zahteva $E(A_i) = \lambda^{-1}$ konačno, tada

$$\lim_{t \to \infty} \frac{B(t)}{t} = \lambda \quad (8)$$

Takođe, prema osnovnoj teoremi obnavljanja važi:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E(B(t))}{t} = \lambda \quad (9)$$

Najprecizniju informaciju o očekivanju vremena pristizanja zahteva daje Blackwell-ova teorema obnavljanja, po kojoj

$$E(B(t, t+h]) \to \lambda h, t \to \infty \quad (10)$$

Znači, očekivani broj obnavljanja na intervalu $(t,\ t+h]$ za dovoljno veliko t je proporcionalan dužini intervala i nezavisan od t.

Osnovna pretpostavka, da je prosečna stopa pojavljivanja zahteva konstanta, nije realna jer pristizanja zahteva često zavisi od vremenskih uslova. Posmatrajući parametar λ kao funkciju vremena t, model homogenog Poisson-ovog procesa može se proširiti na nehomogen Poisson-ov proces. On, takođe, startuje sa nulom, ima nezavisne priraštaje, za koje važi da za $0 \leq s < t$, priraštaj $B(t) - B(s)$ ima Poisson-ov raspored sa parametrom $\int_s^t \lambda(y)dy$. Pri tome, funkcija $\mu(t) = \int_0^t \lambda(y)dy$, predstavlja funkciju srednje vrednosti nehomogenog Poisson-ovog procesa, za neke nenegativne merljive funkcije λ. Ukoliko je funkcija srednje vrednosti linearna, tj. $\mu(t) = \lambda t$, radi se o homogenom Poisson-ovom procesu, a u suprotnom o nehomogenom. Uvođenjem funkcije intenziteta $\lambda(t)$ proces pristizanja zahteva može se pratiti i modelirati i prema sezonskim trendovima. Ukoliko zahtevi pristižu iz heterogene grupe osiguranika, stopa pristizanja zahteva varira od jedne do druge polise, tako da se $\lambda(t)$ može posmatrati kao slučajna promenljiva $\Lambda(t)$, $\forall\ t > 0$. Skup $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ je stohastički proces, pa, samim tim, proces $\{B(t): t \geq 0\}$ predstavlja dvostruki stohastički Poisson-ov proces. Tretirajući λ kao slučajnu promenljivu koja ne zavisi od vremena, stohastički proces $\{B(t): t \geq 0\}$ predstavlja mešovit Poisson-ov proces, koji je još moćnija generalizacija opšteg Poisson-ovog procesa. Mešoviti Poisson-ov proces gubi neke osobine Poisson-ovog procesa (priraštaji su međusobno zavisni, raspored za $B(t)$ u opštem slučaju nije Poisson-ov), ali se dobija mnogo veći izbor trajektorija nego kod Poisson-ovog procesa i procesa obnavljanja (Grandell, 1997).

MODELIRANJE PROCESA UKUPNE SUME ISPLAĆENIH ODŠTETA

Analiziranje procesa potraživanja se proširuje, ukoliko se u razmatranje, osim broja pristiglih zahteva, uključi i veličina potraživanja, koju ti zahtevi indukuju. Zbir pojedinačnih potraživanja, odnosno, agregatni iznos potraživanja, predstavlja ključni problem kako u praksi tako i u teorijskim razmatranjima. Naime, kako su i broj zahteva i iznos potraživanja stohastičke promenljive, ovde imamo dvostruki stohastički model agregatnog iznosa potraživanja. U zavisnosti od izbora procesa prebrajanja B, dobijamo različite modele za proces ukupnog iznos isplaćenih odšteta do vremenskog trenutka t:

$$Z(t) = X_1 + ... + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{B(t)} X_i\,,\ t \geq 0 \tag{11}$$

"Jedan od najpopularnijih i najkorisnijih modela u matematici neživotnog osiguranja predstavlja Cramer-Lundberg-ov model (Cramer, 1955), koji kombinuje iznos zahteva i vreme pristizanja zahteva, uz sledeće pretpostavke (Mikosch, 2009, 18):

- proces prebrajanja zahteva $B(t) = max\{i \geq 0 : T_i \leq t\}$ je homogen Poisson-ov proces sa stopom $\lambda > 0$, u kojem se zahtevi realizuju u trenucima pristizanja $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ... ;$
- zahtev pristigao u trenutku T_i indukuje isplatu štete X_i. Niz $\{T_i\}$ je niz nenegativnih, nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom funkcijom rasporeda;
- nizovi $\{X_i\}$ i $\{T_i\}$ su međusobno nezavisni".

Ako posmatramo diskontovanu sumu, tj. sadašnju vrednost kumulativnog iznosa zahteva u vremenskom intervalu [0, t]:

$$Z_0(t) = \sum_{i=1}^{B(t)} e^{-V_i} X_i\,,\ t \geq 0 \tag{12}$$

gde je $r > 0$ kamatna stopa, u Cramer-Lundberg-ovom modelu je:

$$E\left(\sum_{i=1}^{B(t)} e^{-rT_i} X_i\right) = \lambda \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rt}\right) E(X_1) \tag{13}$$

očekivani iznos potreban za izmirenje zahteva pristiglih u posmatranom vremenskom intervalu.

Osiguravače, generalno, interesuje red veličine za $Z(t)$, pa samim tim i funkcije rasporeda za $Z(t)$. Kako je određivanje rasporeda za $Z(t)$ veoma komplikovan problem, rešenje predstavlja simulacija modela i dobijanje grube procene za očekivanje i varijansu za $Z(t)$.

Očekivanje ukupnog iznosa isplaćenih šteta nam ukazuje na njegovu prosečnu veličinu. Uz pretpostavku nezavisnosti između X_i i B, jednostavno se može dobiti, ako su $E(B(t))$ i $E(X_1)$ konačni:

$$E\left(Z(t)\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{B(t)} X_i \middle| B(t)\right)\right] = \\ = E\left(B(t) E X_1\right) = E\left(B(t)\right) E\left(X_1\right) \tag{14}$$

Kako je u Cramer-Lundberg-ovom modelu proces B(t) homogen Poisson-ov proces, tada je E(B(t)) = λt, gde je λ stopa intenziteta homogenog Poisson-ovog procesa, tako da iz (14) dobijamo:

$$E(Z(t)) = \lambda t E(X_1) \tag{15}$$

Da bi imali kompletniju informaciju o rasporedu za $Z(t)$, treba kombinovati informaciju o očekivanju sa varijansom $Var(Z(t))$, za koju važi (Mikosch, 2004):

$$Var(Z(t)) = E(B(t))Var(X_1) + \\ + Var(B(t))(E(X_1))^2 \tag{16}$$

Kako u Cramer-Lundberg-ovom modelu važi da je $E(B(t)) = Var(B(t)) = \lambda t$, dobijamo:

$$Var(Z(t)) = \lambda t E(X_1{}^2) \tag{17}$$

Još jedan istaknut model za proces $\{Z(t) \; : \; t \geq 0\}$ je uveo Sparre-Andersen, (Andersen, 1957), a njegove implikacije proučavalo je više autora (Sharif & Panjer, 1995; Genest et al, 2003), kod kojeg je proces $\{B(t): t \geq 0\}$ proces obnavljanja. Ali u modelu obnavljanja, izvođenje procene očekivanja i varijanse nije jednostavno i ne daje ovako konkretne rezultate. Videli smo da, prema strogom zakonu velikih brojeva, ako je očekivanje vremena prispeća dva uzastopna zahteva $E(A_i) = \lambda^{-1} < \infty$, tada $\frac{E(B(t))}{t} \to \lambda$ kada $t \to \infty$.

Time dobijamo da je :

$$E(Z(t)) = \lambda t E(X_1)(1+o(1)), \;\; t \to \infty \tag{18}$$

i

$$Var(Z(t)) = \lambda t[Var(X_1) + Var(A_1) \cdot \\ \cdot \lambda^2 (E(X_1))^2](1+o(1)) \tag{19}$$

Na osnovu ovih rezultata dobijamo da očekivanje i varijansa asimptotski rastu skoro linearno kao funkcija vremena t. Ova informacija može biti vrlo korisna u praktičnom određivanju premije dovoljne za poravnjanje gubitaka, veličine $Z(t)$.

PRINCIPI OBRAČUNA PREMIJE

Novčani iznos koji osiguranik plaća osiguravaču kao nadoknadu za preuzimanje rizika je premija. Između rizika i premije postoji uska povezanost jer se visina premije određuje prema prosečnoj veličini rizika, čija se svaka promena mora odraziti na visinu premije. Posmatrajući premiju kao monetarnu isplatu osiguravača, u kontekstu opisanih procesa, očigledno je da će osiguravajuće društvo poslovati sa gubitkom ako premija bude manja od očekivanog iznosa isplata tj ako $p(t) < Z(t)$. Kako smo u prethodnim razmatranjima dobili da je $E(Z(t)) = \lambda t E(X_1)(1+o(1))$, $t \to \infty$, logično je premiju odrediti tako da je

$$p(t) = \lambda t E(X_1)(1+\rho) \tag{20}$$

gde je ρ pozitivna konstanta i predstavlja sigurnosni dodatak, odnosno doplatu za sigurnost.

U teoriji rizika postoje principi, koje sve premije $p(t)$ treba da zadovolje, poznati kao premijski principi. Da bi odredili premiju, kao preslikavanje neizvesnih budućih gubitaka u finansijski ekvivalent, aktuari su razvili brojne metode za determinisanje premijskog principa, (Albers, 1999; Dickson, 1991; Landsman et al, 2001), od kojih su bazični:

- Princip neto-premije je osnovni princip, po kojem je $p(t) = E(Z(t))$. On ne podrazumeva sigurnosni dodatak, jer aktuari često pretpostavljaju da rizik praktično ne postoji ako osiguravač proda dovoljno, identično distribuiranih i nezavisnih polisa;
- Princip očekivane vrednosti je zasnovan na prethodnom ali uključujući proporcionalni sigurnosni dodatak. Prema ovom principu $p(t) = (1+\rho)\, E(Z(t))$ za neko $\rho > 0$. Ovaj princip se uglavnom koristi u životnom osiguranju. Primena ovog principa u neživotnim osiguranjima je ograničena zbog velike heterogenosti preuzetih rizika;
- Princip varijanse polazi od pretpostavke da je $p(t) = E(Z(t)) + \alpha Var(Z(t))$, za neko $\alpha > 0$, po kojem je sigurnosni dodatak proporcionalan varijansi očekivanih gubitaka;
- Princip standardne devijacije je takođe zasnovan na principu neto-premije i često korišćen u neživotnom osiguranju, prema kojem očekivana vrednost gubitka mora biti pokrivena premijom koja sadrži i sigurnosni dodatak proporcionalan standardnoj devijaciji očekivanih šteta, tj. $p(t) = E(Z(t)) + \alpha\sqrt{Var(Z(t))}$, za $\alpha > 0$. Ovaj princip se, zbog linearnosti u odnosu na

proporcionalne promene odštetnih zahteva, najčešće koristi kod osiguranja imovine i nezgoda.

ZAKLJUČAK

Osiguravajuća društva su institucije koje apsorbuju nepoželjne efekte rizika svojih korisnika. Rapidne promene poslovnog i privrednog okruženja, zbog uticaja kako političkih, tako i pravnih, socioloških, klimatskih faktora, zahtevaju sveobuhvatni i dinamički tretman rizika, posebno u neživotnom osiguranju. Zbog toga, H. Cramer navodi da je "cilj teorije rizika, da pruži matematičku analizu fluktacija u poslovima osiguranja i predloži različita sredstva zaštite od njihovih nepoženjnih efekata" (Cramer, 1930, 7). Najstariji pristup ovom problemu je individualna teorija rizika. Ona posmatra pojedinačne polise osiguranja, sa različitim karakteristikama i profilima rizika, tako da se ukupan rizik poslovanja dobija sumiranjem potraživanja nastalih iz svih polisa u portfoliu osiguranja. Međutim, kako potraživanja nastupaju slučajno, proces rizika je stohastički proces. Samim tim, kolektivni model rizika, zasnovan na aplikaciji stohastičkih procesa u osiguranju, ima veliku ulogu u razvoju akademske aktuarske nauke. U ovom modelu, potraživanja se tretiraju agregatno, odnosno, na nivou portfolia u celini. Iako se proces rizika smatra jednim od jednostavnijih oblika stohastičkih procesa, potrebno je još mnogo toga uraditi za njegovu praktičnu primenu.

Za konstrukciju i razvijanje modela kako za proces prebrajanja potraživanja, tako i za proces ukupne sume isplaćenih zahteva, matematička podloga je aplicirala neke neophodne, ali neraealne pretpostavke. Pored mnogostrukog značaja teorijskih razmatranja, njihov osnovni nedostatak i ograničenje je određivanje funkcije rasporeda, koja realno oslikava statistiku osiguravača. Izvršene simulacije predloženih modela, koriste neku od poznatih funkcija rasporeda, koja skoro nikada ne može adekvatno predstaviti portfolio osiguravača. Veliki broj radova je danas usmeren na izvođenje opštih funkcija rasporeda, koje će povećati korenspodenciju izvedenih rezultata sa realnošću (Cossette et al, 2002; Embrechts et al, 1997; Kaas et al, 2001). Osim toga, dosta radova je orijentisano na konstrukciju modela koji će uključiti inflaciju, pri određivanju ukupne sume isplaćenih odšteta. Za praktičnu primenu, kao pravac daljeg razvoja ove teorije, neophodno se mora uzeti u obzir činjenica da se potraživanja ne isplaćuju u isto vreme, niti odmah po pristizanju zahteva u osiguravajuće društvo. Takođe, posebnu pažnju i tretman zahtevaju i troškovi koji prate obradu i rešavanje zahteva za isplatama.

Osnovni rezultati kolektivne teorije rizika, koji su predstavljeni u radu, ukazuju na širok dijapazon modifikacija, modeliranja i simulacija događaja koji mogu nastupiti. Osnovni nedostatak teorijskih razmatranja, pa samim tim i ovog rada, je trenutna, limitirana aplikativnost u praktičnom poslovnom ambijentu. Međutim, kako se asortiman rizika neživotnih osiguravača, u sve turbulentnijem poslovnom ambijentu, konstantno povećava, realne posledice se više ne mogu predvideti samo korišćenjem statističkih podataka poslovanja. Neosporno je da kolektivni model rizika predstavlja široko naučno polje, koje angažmanom brojnih naučnika daje sve konkretnije rezultate približavanja teorije konkretnim poslovnim problemima. Samim tim, spoj stohastičke vizuelizacije i aktuarskog iskustva predstavlja jak mehanizam u rešavanju sve kompleksnijih rizika osiguravača.

REFERENCE

Albers, W. (1999). Stop-loss premiums under dependence. *Insurance: Mathematics and Economics 24*, 173–185.

Andersen, E. S. (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between claims. *Bulletin of the Mathematics and its Application, 12,* 275-279.

Asmussen, S. (2000). *Ruin Probabilities.* Singapore: World Scientific.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics.* Schaumburg, Illinois: Society of Actuaries.

Cossette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E., & Rihoux, J. (2002). On two dependent individual risk models. *Insurance: Mathematics and Economics, 30,* 153–166.

Cramer, H. (1930). *On the mathematical theory of risk.* Stockholm, Skandia Jubilee Volume.

Cramer, H. (1955). *Collective risk theory: a survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic process.* 7th Jubilee Volume of Skandia Insurance Company. Stockholm, 5–92,

Daykin, C. D, Pentikäinen, T., & Pesonen, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries.* London, UK: Chapman & Hall.

Dickson, D. C. M. (1991). The probability of ultimate ruin with a variable premium loading – a special case. *Scandinavian Actuarial Journal,* 75–86.

Embrechts, P., & Klüppelberg, C. (1993). Some Aspects of Insurance Mathematics Theory of Probability and its Application. *Theory ov Probability and Its Application, 38,* 262-295.

Embrechts, P., Kluppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* New York, NY: Springer.

Genest, C., Marceau, E., & Mesfioui, M. (2003). Compound Poisson approximation for individual models with dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics, 32,* 73–85.

Grandell, J. (1997). *Mixed Poisson Processes.* London, UK: Chapman & Hall.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Boston, USA: Kluwer Academic Publishers.

Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson Processes.* Oxford: Clarendon Press.

Kling, B. M., & Goovaerts, M. (1993). A note on compound generalized distributions. *Scandinavian Actuarial Journal,* 1, 60–72.

Klugman, S., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (1998). *Loss Models: from Data to Decisions.* New York, NY: John Wiley.

Landsman, Z., & Sherris, M. (2001). Risk measures and insurance premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics, 29*(1), 103-115.

Lundberg, F. (1932). Some supplementary research on the collective risk theory. *Skandinavisk Aktuarietidskrift, 15,* 137-158.

Mikosch, T. (2004). *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with Stochastic Processes.* Berlin, Germany: Springer.

Minkowa, L. (2010). *Insurance Risk Theory.* Lecture Notes. from www.fmi.uni-sofia.bg

Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (1992). *Insurance Risk Models.* Schaumburg, Illinois: Society of Actuaries.

Ramasubramanian, S. (2005). *Poisson process and insurance: an introduction.* Prepared for a series of lectures given at a Refresher course in Applied Stochastic Processes, held at the Indian Statistical Institute, New Delhi, from http://www.math.iisc.ernet.in

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., & Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* New York, NY: Wiley and Sons.

Shari, A. H., & Panjer, H. H. (1995). An improved recursion for the compound generalize Poisson distribution. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker,* 1, 93-98.

Primljeno 5. jula 2013,
nakon revizije,
prihvaćeno za publikovanje 26. avgusta 2013.

Zlata Đurić je asistent na nastavnim predmetima Matematika u ekonomiji i Finansijska i aktuarska matematika, na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Kragujevcu. Ključno istraživačko interesovanje je primena matematičke aparature na ekonomsku problematiku, odnosno, finansijska matematika i modeli osiguranja.

COLLECTIVE RISK MODEL IN NON-LIFE INSURANCE

Zlata Djuric

Faculty of Economics, University of Kragujevac, Kragujevac, Serbia

The operation of business insurance companies, based on assuming risks of different profiles, is accompanied by fluctuations in the business environment. The complexity of predicting a financial effect for claims in non-life insurance lies in the structure of insurers' liabilities, whose amount cannot be determined at the time of payment of the premium. By analyzing the key insurance processes, risk theory focuses on modeling claims as the financial consequences of unforeseen events. In addition, it provides the answer as to how much of a premium to charge in order to avoid bankruptcy, which makes it a complex and topical research area. The paper presents the main results of the collective risk model for the key business processes of non-life insurance companies: the claim number process and the claim amount process. In risk theory, these are treated as stochastic processes, which offers a wide range of possibilities for the modeling and simulation of specific business problems.

Keywords: general insurance, risk theory, stochastic process, Poisson process, premium calculation principles

JEL Classification: C13, C43, C46